
Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 1.1 (10 Punkte).

(a) Seien A, B variable Aussagen.

  (1) Finden Sie die Wahrheitstafel der Aussage $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$.

  (2) Für wieviele Pfeile ist $(\cdots((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \cdots \Rightarrow A)$ eine Tautologie?

(b) Beweisen Sie per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot k = 2^{n+1} \cdot (n-1) + 2.$$

Aufgabe 1.2 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass für Abbildungen $f : M \to N$ folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv,

(b) für alle $A, B \subseteq M$ ist $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(c) für alle $A \subseteq B \subseteq M$ ist $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

Aufgabe 1.3 (10 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Geben Sie ein Rechts- bzw. Linksinverses an, falls ein solches existiert:

(a) $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2 + x$,

(b) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$,

(c) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (2x, 3y, x + y)$,

(d) $f:\ \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ (a, b) \mapsto a/b$,

(e) $f:\ [0, 1] \to [0, 1],\ x \mapsto (1 - x)/(1 + x)$.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 1.4 (keine Abgabe). Ein Rezept aus den Logeleien von Zweistein: Man nehme

(a) Thymian und dazu von Majoran und Salbei mindestens ein Gewürz,

(b) sowohl Salbei als auch Majoran,

(c) sowohl Oregano als auch Chili,

(d) weder Salbei noch Thymian, und von Oregano und Chili maximal eines,

(e) weder Oregano noch Majoran,

(f) weder Chili noch Salbei.

Der Koch befolgt *keine* dieser Vorschriften. Welche Gewürze verwendet er?

Aufgabe 1.5 (keine Abgabe). Gibt es eine in- bzw. sur- bzw. bijektive Abbildung f zwischen den angegebenen Mengen? Finden Sie jeweils ein Beispiel oder beweisen Sie, dass es keine solchen Beispiele gibt.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

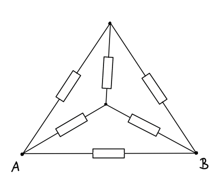
(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

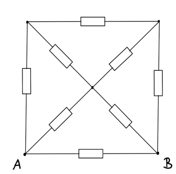
(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

(d) $f : [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \to [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$,

(e) $f : X \to \mathcal{P}(X)$ für eine Menge X mit Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$.

Aufgabe 1.6 (keine Abgabe). Mehrere Widerstände vom gleichen Wert R seien zu folgenden zwei Schaltungen verlötet:





Wir legen zwischen A und B eine Spannung U an. Welche Ströme fließen?

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 2.1 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass eine reflexive Relation $\sim$ auf einer nicht-leeren Menge M genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall a, b, c \in M : \quad (a \sim b) \wedge (a \sim c) \implies (b \sim c)$$

(b) Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Finden Sie die kleinste Teilmenge $R \subseteq M \times M$, für die gilt:

- Es ist $(1, 2), (1, 3), (4, 5) \in R$, und
- $R \subseteq M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2.2 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $G := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\}$ abgeschlossen ist unter der Verknüpfung

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) \ := \ (a_1 a_2,\ a_1 b_2 + b_1)$$

und dass $(G, *)$ eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe abelsch?

(b) Für welche $g \in G$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass g^n das neutrale Element ist?

Aufgabe 2.3 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie: Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn $G \to G, a \mapsto a^{-1}$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(b) Sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Prüfen Sie nach, dass für alle Untergruppen $A \subseteq G$ und $B \subseteq H$ gilt:

$$\begin{aligned} f(A) \ &= \ \{\, f(a) \in H \mid a \in A \,\} \quad \text{ist eine Untergruppe von } H, \\ f^{-1}(B) \ &= \ \{\, g \in G \mid f(g) \in B \,\} \quad \text{ist eine Untergruppe von } G. \end{aligned}$$

Beantworten Sie jeweils mit einem Beweis oder Gegenbeispiel:

- Ist für jede abelsche Untergruppe $A \subseteq G$ das Bild $f(A)$ abelsch?
- Ist für jede abelsche Untergruppe $B \subseteq H$ das Urbild $f^{-1}(B)$ abelsch?

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 2.4 (keine Abgabe). Gegeben seien folgende Relationen:

(a) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow |a-b| \leq 1$ auf der Menge $M = \mathbb{R}$.

(b) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : a - b = \frac{m}{2n-1}$ auf der Menge $M = \mathbb{Q}$.

(c) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow a(1) = b(1)$ auf der Menge $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Hier setzen wir

$$\mathrm{Abb}(A, B) \;=\; \big\{\text{Abbildungen } f : A \to B\big\} \quad \text{für Mengen } A, B.$$

(d) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : a(x) = b(x)$ auf der Menge $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(e) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a(n) - b(n)) = 0$ auf $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$.

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen?

Aufgabe 2.5 (keine Abgabe).

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln der Diedergruppen D_3 und D_4 auf.

(b) Zeigen Sie, dass die Diedergruppen D_n für $n \geq 3$ nicht abelsch sind.

Aufgabe 2.6 (keine Abgabe). Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$ ein Monoid ist bezüglich

$$* : \quad \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(G) \;\to\; \mathcal{P}(G), \quad A * B \;:=\; \{\, ab \in G \mid a \in A, b \in B \,\}.$$

(b) Welche Elemente dieses Monoids sind invertierbar?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 3.1 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass für alle Gruppen G_1 und G_2 das Produkt $G_1 \times G_2$ eine Gruppe ist mit

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \ := \ (a_1 b_1, a_2 b_2) \quad \text{für} \quad a_1, b_1 \in G_1 \quad \text{und} \quad a_2, b_2 \in G_2.$$

(b) Welche der folgenden vier Gruppen

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

sind zueinander isomorph? Geben Sie jeweils einen Isomorphismus an oder begründen Sie, warum es keinen solchen Isomorphismus geben kann.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte).

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl. Zeigen Sie, dass die Menge

$$G \ := \ \{a + b\sqrt{m} \in \mathbb{R} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \text{ und } (a, b) \neq (0, 0)\}$$

eine Gruppe bildet mit der Verknüpfung

$$(a + b\sqrt{m}) \cdot (c + d\sqrt{m}) \ := \ (ac + mbd) + (ad + bc)\sqrt{m}.$$

(b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Q}$ mit

$$a + b\sqrt{3} \ = \ (1 - \sqrt{3})^{-1}$$

Aufgabe 3.3 (10 Punkte). Unter einem *Automorphismus* einer Gruppe G versteht man einen Isomorphismus der Gruppe auf sich. Sei $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller solcher Automorphismen. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(G) = \{\text{bijektive Abbildungen } G \to G\}$ bezüglich der durch Verkettung von Abbildungen gegebenen Verknüpfung.

(b) Für alle $g \in G$ ist die Abbildung $c_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ ein Automorphismus, und

$$\varphi : \ G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), \ g \ \mapsto \ c_g \quad \text{ist ein Homomorphismus.}$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 3.4 (keine Abgabe). Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $g \in G$ ist $\langle g \rangle := \{g^k \in G \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset G$ eine Untergruppe der Ordnung

$$\operatorname{ord}(g) := \begin{cases} \infty & \text{falls } g^n \neq e \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid g^n = e\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{ord}(g)$ für alle $g \in G$ im Fall $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$.

(c) Wir nennen G *zyklisch*, wenn $G = \langle g \rangle$ für ein $g \in G$ ist. Zeigen Sie:

- Jede zyklische Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ für genau ein $n \in \mathbb{N}_0$.
- Jede endliche Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch.

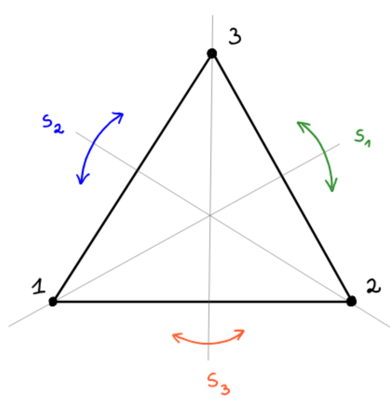
Aufgabe 3.5 (keine Abgabe). Gegeben sei die Diedergruppe $D_3 = \{\mathrm{id}, s_1, s_2, s_3, r, r^2\}$.

(a) Sei $K = \langle s_1 \rangle \subseteq D_3$. Berechnen Sie

- die Rechtsnebenklassen $Kb = \{xb \mid x \in K\}$ für alle $b \in D_3$,
- die Linksnebenklassen $aK = \{ax \mid x \in K\}$ für alle $a \in D_3$.

(b) Gibt es eine Gruppe G und einen Homomorphismus

$$f\colon D_3 \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad K = \ker(f)?$$



Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 4.1 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

einen Ring bezüglich der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bildet.

(b) Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen

$$f : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4.2 (10 Punkte).

(a) Folgern Sie aus den Additionstheorem für sin und cos die Formel

$$\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big)^n \;=\; \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}.$$

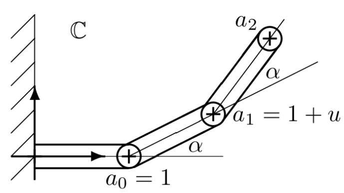
(b) Berechnen Sie $(1+i)^n + (1-i)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.3 (10 Punkte).

(a) Ein Roboterarm bestehe aus Segmenten der Länge 1, von denen jedes den Winkel α zum vorigen bilde wie in der folgenden Skizze in der komplexen Ebene angedeutet. Das erste Segment beginne im Nullpunkt und ende im Punkt $a_0 = 1$. Zeigen Sie, dass der Endpunkt des $(n+1)$-ten Gelenks gegeben ist durch

$$a_n \;=\; \frac{1 - u^{n+1}}{1 - u} \quad \text{mit} \quad u \;:=\; e^{i\alpha} \;\in\; \mathbb{C}.$$

(b) Berechnen Sie für $n = 10$ und $\alpha = \pi/6$ den Imaginärteil $\mathrm{Im}(a_n)$.



Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 4.4 (keine Abgabe).

(a) Schreiben Sie die komplexen Zahlen

$$z = \frac{1}{1-i} \quad \text{und} \quad w = \frac{3-i}{1-2i},$$

ihr multiplikatives Inverses und ihr Quadrat in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = iz\}, \\ B &= \{\, z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z|^2 \leq 2\,\mathrm{Im}(z)\,\}, \\ C &= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z^2) = 1\}. \end{aligned}$$

(c) Beweisen Sie die sog. Parallelogramm-Gleichung

$$|z|^2 + |w|^2 = \tfrac{1}{2}|z+w|^2 + \tfrac{1}{2}|z-w|^2$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Was bedeutet diese Gleichung geometrisch?

Aufgabe 4.5 (keine Abgabe).

(a) Bis 2007 wurden für Bücher die ISBN-10 benutzt. Diese bestehen aus neun Ziffern $a_1, \ldots, a_9 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und einer Prüfziffer $p \in \{0, 1, \ldots, 9, X\}$. Die Prüfziffer dient zur Fehlerkontrolle und ergibt sich aus

$$p \equiv a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 9a_9 \bmod 11$$

wobei X für 10 steht. Zeigen Sie, dass die Prüfziffer folgende Fehler erkennt:

- Änderung einer Ziffer a_i unter Beibehaltung der übrigen Ziffern.
- Vertauschung zweier Ziffern $a_i \neq a_j$ ohne Änderung der übrigen.

(b) Die heutigen ISBN-13 haben Ziffern $a_1, \ldots, a_{13} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, mit a_{13} als Prüfziffer und

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \cdots + a_{11} + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \pmod{10}.$$

Welche Fehler des vorigen Typs werden von dieser Prüfziffer noch erkannt?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 5.1 (10 Punkte). Sei K ein Körper und

$$\varphi\colon \quad K[x] \longrightarrow \mathrm{Abb}(K,K), \quad f \mapsto (a \mapsto f(a))$$

die Abbildung, die einem Polynom seine Polynomfunktion zuordnet. Zeigen Sie:

(a) Hat K unendlich viele Elemente, dann ist φ injektiv, aber nicht surjektiv.

(b) Ist K ein endlicher Körper, dann ist φ surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte). Welche der folgenden Teilmengen $U_1, \ldots, U_6 \subseteq \mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume bezüglich der komponentenweisen Vektorraumstruktur?

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z \right\}, \qquad U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid xy = z = 0 \right\},$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = 1 \right\}, \qquad U_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a^3+1 \\ b^3-1 \\ a^3+b^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 0 \right\}, \qquad U_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a^3+1 \\ b^3-2 \\ a^3+b^3 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 5.3 (10 Punkte). Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(a) Für welche $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist $v_k \in \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$?

(b) Prüfen Sie direkt anhand der Definition nach, für welche $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Vektoren v_1, v_2, v_k ein linear unabhängiges System bilden.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 5.4 (keine Abgabe). Sei K ein Körper.

(a) Sei $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ ein Polynom, und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ seien paarweise verschiedene Nullstellen desselben. Zeigen Sie

$$a_0 \;=\; (-1)^n \cdot a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{und} \quad a_{n-1} \;=\; -a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

(b) Bestimmen Sie für das Polynom $g = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 \in K[x]$ mittels Polynomdivision alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten.

Hinweis: Hier sind alle Nullstellen ganze Zahlen.

(c) Sei $h \in K[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 0$.

- Zeigen Sie, dass h höchstens n verschiedene Nullstellen in K haben kann.
- Folgern Sie, dass das Polynom h durch seine Werte an je $n+1$ paarweise verschiedenen Stellen bereits eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 5.5 (keine Abgabe). Sei K ein Körper.

(a) Sei K ein Körper und X eine Menge. Prüfen Sie nach, dass $V = \mathrm{Abb}(X, K)$ einen Vektorraum über dem Körper K bildet mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} (f+g)(x) \;&:=\; f(x) + g(x) \\ (\alpha \cdot f)(x) \;&:=\; \alpha \cdot (f(x)) \qquad \text{für} \quad f, g \in V \quad \text{und} \quad \alpha \in K. \end{aligned}$$

(b) Sei nun $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der Folgen reeller Zahlen mit der gliedweisen Addition und Skalarmultiplikation. Welche der folgenden Teilmengen sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume?

- $U_1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \exists c \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c\}$,
- $U_2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_n = 0\}$,
- $U_3 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$,
- $U_4 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + 1\}$,
- $U_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+k} = a_n\}$,
- $U_6 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N} : a_{n+k} = a_n\}$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 6.1 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Untervektorräume:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(b) Geben Sie falls möglich ein $u \in \mathbb{R}^3$ mit $u \notin U$ und ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $v \notin V$ an.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte). Sei K ein Körper und $n \geq 3$. Für $i = 1, \ldots, n$ betrachte man die Vektoren

$$v_i = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\\0\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in K^n$$

mit einer Null an der i-ten Stelle und Einsen an allen übrigen Stellen.

(a) Berechnen Sie die Dimension der linearen Hülle $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K$ für $K = \mathbb{R}$.

(b) Was ändert sich, wenn Sie stattdessen $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p wählen?

Aufgabe 6.3 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P) \leq 3 \text{ und } P(0) = P(3) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]$$

ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum ist, und bestimmen Sie seine Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

(b) Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Er enthält beispielsweise die Sinusfunktion, die Cosinusfunktion und die Exponentialfunktion. Bestimmen Sie die Dimension der Untervektorräume

$$U_1 := \langle \sin, \exp \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V$$

$$U_2 := \langle f, \sin, \cos \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V$$

wobei $f \in V$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x + \pi/4)$ bezeichne.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 6.4 (keine Abgabe). Sei K ein Körper. Betrachten Sie in $V = K^n$ für $n \geq 3$ die folgenden Untervektorräume:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{ (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0 \}, \\ U_2 &:= \{ (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid a_1 = \cdots = a_n \}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie $\dim_K(U_1)$, $\dim_K(U_2)$ und $\dim_K(U_1 \cap U_2)$ im Fall $K = \mathbb{R}$.

(b) Was ändert sich, wenn Sie stattdessen $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p wählen?

Aufgabe 6.5 (keine Abgabe).

(a) Prüfen Sie nach, dass die Menge

$$V := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig mit } f(x + 2\pi) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ist.

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ seien $v_i \in V$ definiert durch

$$v_i(x) := \begin{cases} \cos(nx) & \text{für } i = 2n - 1 \text{ ungerade} \\ \sin(nx) & \text{für } i = 2n \text{ gerade} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das System $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Tipp:

- Angenommen, es wäre $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ nicht alle Null.
- Zeigen Sie zuerst, dass $\alpha_i \neq 0$ für mindestens drei Indices i sein müßte.
- Betrachten Sie dann die durch zweimaliges Ableiten erhaltene Gleichung, und addieren Sie ein Vielfaches der ursprünglichen Gleichung hinzu, um die Anzahl der Koeffizienten $\alpha_i \neq 0$ zu verringern.

(c) Ist $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 7.1 (10 Punkte). Es seien folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.

(c) Bestimmen Sie ein $j \in \{1, 2, 3\}$, sodass u_1, u_2, v_j eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 7.2 (10 Punkte). In $V = \mathbb{R}^4$ seien die Untervektorräume

$$\begin{aligned} U_1 &= \big\{(x_1, \ldots, x_4) \in V \mid x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0\big\}, \\ U_2 &= \big\{(x_1, \ldots, x_4) \in V \mid 2x_1 - x_2 = x_3 + 3x_4 = 0\big\}, \end{aligned}$$

gegeben (dass dies Untervektorräume sind, müssen Sie hier nicht mehr zeigen).

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

(b) Ergänzen Sie diese zu Basen von U_1, U_2 und $U_1 + U_2$.

Aufgabe 7.3 (10 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum und $n = \dim(V) < \infty$.

(a) Sei $H \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim(H) = n - 1$, und sei $U \subseteq V$ ein beliebiger Unterraum. Zeigen Sie

$$\dim(U \cap H) \ \geq \ \dim(U) - 1.$$

(b) Sei $k \leq n$. Für $i = 1, \ldots, k$ seien Unterräume $H_i \subseteq V$ mit $\dim(H_i) = n - 1$ gegeben. Zeigen Sie

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \ \geq \ n - k.$$

(c) Zeigen Sie, dass jeder Unterraum $U \subseteq V$ der Dimension $\dim(U) = n - k$ sich schreiben lässt als

$$U \ = \ H_1 \cap \cdots \cap H_k$$

wobei die $H_i \subseteq V$ geeignete Unterräume der Dimension $\dim(H_i) = n - 1$ sind.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 7.4 (keine Abgabe). Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$ für alle Unterräume $U_i \subseteq V$.

(b) Folgern Sie mit der Dimensionformel im Fall $\dim(V) < \infty$:

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2 + U_3) \quad \leq \quad & \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) \\ & - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) \\ & + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3). \end{aligned}$$

(c) Finden Sie in $V = K^3$ Unterräume $U_i \subseteq V$ mit $\dim(U_i) = 2$, sodass gilt:

- $U_i \cap U_j \cap U_k = \{0\}$ für alle $i < j < k$, aber
- $\dim(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \ > \ \sum_{i=1}^{4} \dim(U_i) - \sum_{i<j} \dim(U_i \cap U_j)$,

Aufgabe 7.5 (keine Abgabe).

(a) Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension, und es seien $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ Unterräume gegebener Dimension d. Zeigen Sie wie folgt, dass es dann einen Unterraum $W \subseteq V$ gibt mit $V = U_i \oplus W$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

1) Wählen Sie ein $w \in V$ mit $w \notin \bigcup_{i=1}^{m} U_i$.
2) Per Induktion gebe es ein $W' \subseteq V$ mit $V = (U_i + \langle w \rangle) \oplus W'$ für alle i.
3) Folgern Sie, dass $W := W' + \langle w \rangle$ die gewünschte Eigenschaft hat.

(b) Bleibt diese Aussage auch für endliche Körper K richtig?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 8.1 (10 Punkte).

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Körper bezüglich der Addition und Multiplikation reeller Zahlen ist; das müssen Sie hier nicht mehr zeigen. Ist

$$f: \quad K \longrightarrow K, \quad a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

eine K-lineare Abbildung? Ist f eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung?

(b) Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften für Abbildungen $f : V \to W$ äquivalent zueinander sind:

(1) Die Abbildung f ist K-linear.

(2) $\{(v, f(v)) \in V \oplus W \mid v \in V\} \subseteq V \oplus W$ ist ein K-Untervektorraum.

Aufgabe 8.2 (10 Punkte).

(a) Sind die drei Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

linear unabhängig über $K = \mathbb{C}$? Sind sie linear unabhängig über $K = \mathbb{R}$?

(b) Für welche $c \in \mathbb{C}$ gibt es eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, die auf diesen Vektoren die Werte

$$f(u) = f(v) = 1 \quad \text{und} \quad f(w) = c$$

annimmt? Für welche $c \in \mathbb{C}$ gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare solche Abbildung?

Aufgabe 8.3 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte $A_i \cdot A_j$ für folgende Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Matrix $M_\alpha = R_{-\alpha} \cdot A \cdot R_\alpha$ und vereinfachen Sie mit den Additionstheoremen. Was bedeutet Ihr Resultat geometrisch?

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 8.4 (keine Abgabe). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$V_n \ = \ \{ \, f \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(f) \leq n \, \} \ \subset \ \mathbb{R}[t]$$

der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$, mit der Basis $\mathcal{B}_n = (1, t, t^2, \ldots, t^n)$.

(a) Überlegen Sie sich, dass die Ableitung eine lineare Abbildung

$$D\colon \quad V_n \longrightarrow V_{n-1}, \quad f \mapsto f'$$

definiert, und bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{B}_n}(D)$.

(b) Finden Sie eine lineare Abbildung

$$I\colon \quad V_{n-1} \longrightarrow V_n \quad \text{mit} \quad D \circ I \ = \ \mathrm{id}.$$

Ist I eindeutig bestimmt? Wie sieht die zugehörige Abbildungsmatrix aus?

Aufgabe 8.5 (keine Abgabe). Zeigen Sie:

(a) Der K-Vektorraum aller *endlichen* Folgen

$$V \ = \ \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid a_i = 0 \text{ für fast alle } i \}$$

besitzt eine abzählbare Basis über K.

(b) Sein Dualraum ist der Vektorraum $V^* = K^{\mathbb{N}}$ *aller* Folgen.

(c) Dieser Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ hat keine abzählbare Basis.

Tipp: Für je abzählbar viele Folgen $f_j = (a_{ij})_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ konstruiere man durch Betrachten von immer mehr Anfangsgliedern rekursiv eine Folge $f \in K^{\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $f \notin \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alice sendet Bob eine Postkarte mit dem Text

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 15 \\ 8 & 14 & 17 & 5 \\ 7 & 3 & 20 & 23 \end{pmatrix}$$

und behauptet, dass diese Matrix eine Botschaft enthalte. Um sie zu entschlüsseln, soll Bob die Matrixeinträge als Elemente des Körpers $K = \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ lesen und die lineare Abbildung

$$f\colon \quad K^4 \longrightarrow K^3 \quad \text{mit} \quad f(v) := A \cdot v$$

in geeigneten Basen betrachten. Helfen Sie ihm dabei in folgenden Schritten:

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ des Vektorraumes $V = K^4$ bilden.

Wie lautet die Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_4(K)$ mit $S \cdot e_j = v_j$ für alle j?

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ des Vektorraumes $W = K^3$ bilden.

Wie lautet die Basiswechselmatrix $T \in \mathrm{GL}_3(K)$ mit $T \cdot w_i = e_i$ für alle i?

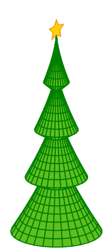
(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Ersetzen Sie dann in der Matrix M die Einträge aus $K = \{0, 1, \ldots, 28\}$ durch Buchstaben laut folgender Tabelle, wobei die Null für ein Leerzeichen steht:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	0
P	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	.	!	

Wie lautet somit die Botschaft von Alice?



Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

In den folgenden Aufgaben sei K ein Körper.

Aufgabe 9.1 (10 Punkte). Wenn $AB = BA$ für zwei quadratische Matrizen A, B gilt, sagen wir, dass die Matrizen miteinander *kommutieren*. Welche $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$ kommutieren mit

(a) allen Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$?

(b) allen Dreiecksmatrizen

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)?$$

(c) allen solchen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen $b_{11} = b_{22} = 1$?

Aufgabe 9.2 (10 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension $m = \dim_K(V)$ und

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid f|_U = 0\} \\ W_2 &:= \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid \mathrm{im}(f) \subseteq U\} \end{aligned}$$

für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ der Dimension $n = \dim_K(U)$. Berechnen Sie die Dimensionen

$$\dim_K(W_1), \ \dim_K(W_2), \ \dim_K(W_1 \cap W_2) \ \text{und} \ \dim_K(W_1 + W_2).$$

Aufgabe 9.3 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie Basen von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ für die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y).$$

(b) Finden Sie abhängig von $\beta \in \mathbb{R}$ alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ des LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R}), \qquad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 9.4 (keine Abgabe). Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

bezüglich der Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bildet und dass dieser Körper isomorph ist zum Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Aufgabe 9.5 (keine Abgabe). Sei V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Untervektorraum $W \subseteq V$ ist die Teilmenge

$$W^\perp := \left\{ f \in V^* \mid f|_W = 0 \right\} \subseteq V^* \quad \text{ein Untervektorraum.}$$

(b) Falls V endlich erzeugt ist, gilt die Formel $\dim_K W^\perp = \dim_K V - \dim_K W$ und der kanonische Isomorphismus $\iota\colon V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ schränkt sich in diesem Fall ein zu einem Isomorphismus

$$\iota\colon \quad W \xrightarrow{\sim} W^{\perp\perp}.$$

(c) Sei nun $K = \mathbb{R}$, und sei $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_\mathbb{R} \subseteq V = \mathbb{R}^5$ der Untervektorraum aufgespannt von

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für $W^\perp$ und eine Matrix A mit $W = \ker(A)$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 10.1 (10 Punkte). Der *Rang* eines Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ von Vektorräumen ist definiert als die Dimension $\mathrm{rk}(f) := \dim_K(\mathrm{im}(f))$. Zeigen Sie, dass für alle Homomorphismen

$$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \xrightarrow{h} V_4$$

endlich erzeugter Vektorräume gilt: $\mathrm{rk}(g) - \mathrm{rk}(g \circ f) \ \geq \ \mathrm{rk}(h \circ g) - \mathrm{rk}(h \circ g \circ f)$.

Aufgabe 10.2 (10 Punkte). Sei $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, und sei $C \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $m_C : V \to V, A \mapsto C \cdot A$ linear ist.

(b) Berechnen Sie den Rang $\mathrm{rk}(m_C) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(m_C))$ in Abhängigkeit von $\mathrm{rk}(C)$.

(c) Zeigen Sie

$$V \ = \ \mathrm{im}(m_C) \oplus \ker(m_C) \quad \text{für} \quad C \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3 (10 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum, und es seien $P, Q \in \mathrm{End}_K(V)$ zwei Projektoren. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\mathrm{id}_V - P$ ein Projektor mit $\ker(P) = \mathrm{im}(\mathrm{id}_V - P)$.

(b) Im Fall $Q \circ P = P \circ Q$ sind auch $P \circ Q$ und $R = P + Q - P \circ Q$ Projektoren mit

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(P \circ Q) \ &= \ \mathrm{im}(P) \cap \mathrm{im}(Q), & \mathrm{im}(R) \ &= \ \mathrm{im}(P) + \mathrm{im}(Q), \\ \ker(P \circ Q) \ &= \ \ker(P) + \ker(Q), & \ker(R) \ &= \ \ker(P) \cap \ker(Q). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung. Wir nennen $P \in \mathrm{End}_K(V)$ einen *Projektor*, wenn $P \circ P = P$ ist.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 10.4 (keine Abgabe). Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Multiplikation mit der Matrix

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ von $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{r\times r} & 0_{r\times t} \\ 0_{s\times r} & 0_{s\times t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r \;=\; \operatorname{rk}(f).$$

(b) Bestimmen Sie für $w \in \operatorname{im}(f)$ eine Parametrisierung der Faser $f^{-1}(w)$.

(c) Zeigen Sie, dass diese Faser die Gerade $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ in genau einem Punkt schneidet.

Aufgabe 10.5 (keine Abgabe). Sei V ein komplexer Vektorraum und $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit

$$A^n \;:=\; \underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{n\text{-mal}} \;=\; \mathrm{id}_V$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Für $0 \leq j < n$ setzen wir

$$P_j \;:=\; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{-jk} A^k \;\in\; \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V) \quad \text{mit} \quad \zeta \;:=\; e^{2\pi i/n} \;\in\; \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist $A \circ P_j = \zeta^j \, P_j$.

(b) Es ist $\mathrm{id}_V = P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1}$.

(c) Es ist $P_j \circ P_k = 0$ für $j \neq k$, und P_j ist ein Projektor: $P_j \circ P_j = P_j$.

(d) Es ist

$$V \;=\; \bigoplus_{j=0}^{n-1} \operatorname{im}(P_j) \quad \text{und} \quad A(v) = \zeta^j \cdot v \quad \text{für alle } v \in \operatorname{im}(P_j).$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 11.1 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Zeigen Sie:

(a) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist eindeutig: Sind $S_1, S_2 \in \mathrm{GL}_m(K)$ zwei invertierbare Matrizen, sodass die Matrizen $S_i A$ für $i = 1, 2$ in reduzierter Zeilenstufenform sind, dann gilt $S_1 A = S_2 A$.

(b) Es ist $\mathrm{rk}(A) < m$ genau dann, wenn man dabei $S_2 \neq S_1$ wählen kann.

Aufgabe 11.2 (10 Punkte).

(a) Prüfen Sie nach, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$$

ist, und berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die dazu inverse Matrix.

(b) Berechnen Sie mit Gauß eine Basis des Aufspanns $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^4$ von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix},$$

und lesen Sie aus der reduzierten Spaltenstufenform eine Darstellung von V als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ab.

Aufgabe 11.3 (10 Punkte).

(a) Sei $U = \mathbb{R} \cdot u \subseteq V = \mathbb{R}^2$ die von $u = (2,1)^t$ aufgespannte Gerade.

- Geben Sie eine Gleichung an für die affine Gerade $(a,b)^t + U \subset V$.
- Zeichnen Sie diese affine Gerade in den Fällen $(a,b) = (-1,0), (1,0), (1,1)$.
- Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung

$$f\colon \quad V/U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y)^t + U \mapsto \alpha x + \beta y$$

  wohldefiniert? Für welche ist sie ein Vektorraumisomorphismus?

(b) Sei $W_0 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in [0,1]\colon f(x) = 0\} \subseteq W = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$W/W_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}([0,1], \mathbb{R}).$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 11.4 (keine Abgabe). Welche der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

lassen sich zerlegen als Produkt von Elementarmatrizen? Bestimmen Sie in diesem Fall jeweils eine solche Zerlegung. Wie erhält man daraus die inverse Matrix? Zur Erinnerung: Die *Elementarmatrizen* sind die in Zeilen- und Spaltenumformungen auftretenden Matrizen

$$\begin{aligned} S_i(\alpha) &= \mathbf{1} + (\alpha - 1) \cdot E_{ii}, \\ S_{ij}(\alpha) &= \mathbf{1} + \alpha \cdot E_{ij}, \\ T_{ij} &= E_{ij} + E_{ji} + \sum_{k \neq i,j} E_{kk}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.5 (keine Abgabe).

(a) Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine additive Untergruppe mit der Eigenschaft:

$$\forall A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K),\ B \in \mathcal{I}: \quad A \cdot B \in \mathcal{I} \quad \text{und} \quad B \cdot A \in \mathcal{I}.$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $\mathcal{I} = \{0\}$ oder $\mathcal{I} = \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ sein muß.

(b) Sei $\varphi\colon \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to S$ ein Ringhomomorphismus vom Matrizenring in einen beliebigen von Null verschiedenen Ring S. Zeigen Sie: φ ist injektiv.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 12.1 (10 Punkte). Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_7.$$

Bestimmen Sie

(a) die Anzahl der Fehlstände von σ und das Signum $sgn(\sigma)$,

(b) die Zerlegung von σ als Produkt paarweise disjunkter Zykel,

(c) eine Zerlegung von σ als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 13 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Z}).$$

Für welche Primzahlen p ist die Matrix $\overline{A} \in \operatorname{Mat}(4 \times 4, \mathbb{F}_p)$, die man aus A durch Reduktion der Matrixeinträge modulo p erhält, invertierbar?

(b) Sei $B \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$, und sei p eine Primzahl, sodass die durch Reduktion der Matrixeinträge modulo p erhaltene Matrix $\overline{B} \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{F}_p)$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ ist.

Aufgabe 12.3 (10 Punkte). Sei $A \in \operatorname{Mat}(2 \times n, K)$ und $B \in \operatorname{Mat}(n \times 2, K)$.

(a) Zeigen Sie: Für $n > 2$ ist $\det(BA) = 0$.

(b) Geben Sie für $n = 3$ ein Beispiel mit $\det(AB) \neq \det(BA)$.

(c) Beweisen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2k} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} \\ b_{k1} & b_{k2} \end{pmatrix}.$$

Hint: Reduzieren Sie per Multilinearität auf den Fall sehr einfacher Matrizen.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 12.4 (keine Abgabe). Wir betrachten den folgenden Code:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	g	h	i	l	m	o	r	s	t	u

Durch Permutation der Ziffern

- mittels $\sigma \in \mathfrak{S}_{11}$ entstehe das Wort: *Logarithmus*,
- mittels $\tau \in \mathfrak{S}_{11}$ entstehe das Wort: *Algorithmus*.

Sei $\mu = \sigma \circ \tau$ das Produkt der beiden Permutationen. Berechnen Sie $sgn(\mu)$.

Aufgabe 12.5 (keine Abgabe).

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1.$$

Aufgabe 12.6 (keine Abgabe).

(a) Geben Sie eine Parametrisierung an für die affine Gerade $\mathcal{L}_{u,v} \subset \mathbb{R}^2$ durch zwei Punkte

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{R}^2.$$

(b) Zeigen Sie

$$\mathcal{L}_{u,v} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

und interpretieren Sie ihr Resultat geometrisch.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 13.1 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ ist B invertierbar mit $B^{-1} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Z})$?

Aufgabe 13.2 (10 Punkte). Sei V ein Vektorraum über K. Ein Vektor $v \in V$ heißt Eigenvektor eines Endomorphismus $h \colon V \to V$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $v \neq 0$ und $h(v) = \lambda \cdot v$ ist. Zeigen Sie für Endomorphismen $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$:

(a) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert λ, so gilt:
- Entweder ist $g(v) = 0$.
- Oder $g(v)$ ist ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

(b) Im Fall $\dim_K(V) < \infty$ haben $f \circ g$ und $g \circ f$ die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe 13.3 (10 Punkte). Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$$

alle Eigenwerte $\lambda \in K$ und Eigenräume $\ker(A - \lambda \cdot \mathbf{1}) \subseteq K^3$ über folgenden Körpern:

(a) $K = \mathbb{R}$,

(b) $K = \mathbb{C}$,

(c) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Hinweis: Die Eigenwerte sind die Lösungen $\lambda \in K$ der Gleichung $\det(A - \lambda \cdot \mathbf{1}) = 0$.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 13.4 (keine Abgabe). Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ sei A_{ij} die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die zu A komplementäre Matrix ist

$$A^* \;=\; (a^*_{ij}) \;\in\; \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad a^*_{ij} \;=\; (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji}).$$

Berechnen Sie A^* sowie $\det(A)$ und im invertierbaren Fall die inverse Matrix A^{-1} für

(a) $A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $A \;=\; \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$,

(c) $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit der zu (b) analogen Form für beliebiges $n > 0$, also

$$a_{ij} \;=\; \begin{cases} c & \text{für } i = j, \\ 1 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Aufgabe 13.5 (keine Abgabe). Sei V ein K-Vektorraum. Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ setzen wir

$$f^n \;:=\; f \circ \cdots \circ f \;\in\; \mathrm{End}_K(V).$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn $f^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, kann f nur $\lambda = 0$ als Eigenwert haben.

(b) Wenn $f^2 + f$ den Eigenwert -1 besitzt, dann hat f^3 den Eigenwert 1.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 14.1 (10 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Leiten Sie hieraus eine Formel für A^n mit $n \in \mathbb{N}$ ab. Folgern Sie, dass der Grenzwert

$$\exp(A) := \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \tfrac{1}{n!} \cdot A^n$$

in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ existiert, und berechnen Sie diesen Grenzwert.

Aufgabe 14.2 (10 Punkte). Sei V ein Vektorraum über K mit $\dim_K V < \infty$. Zeigen Sie, dass für Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_K(V)$ folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$, in der f dargestellt wird durch eine obere Dreiecksmatrix, also

$$M_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i > j.$$

(b) Es gibt eine Kette von Untervektorräumen

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V \quad \text{mit} \quad f(V_i) \subseteq V_i \quad \text{und} \quad \dim_K V_i = i.$$

Aufgabe 14.3 (10 Punkte). Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für welche dieser Matrizen $A_i \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1} \cdot A_i \cdot S$...

(a) eine Diagonalmatrix ist?

(b) eine obere Dreiecksmatrix ist?

Geben Sie in diesem Fall je ein solches S an (Sie müssen dazu S^{-1} nicht berechnen).